

# Economics and Information Studies

確率微分方程式の弱い近似で使用される一般4点分布確率変数について

齊藤 善弘

岐阜聖徳学園大学 経済情報学部

2022年3月



岐阜聖徳学園大学  
経済情報研究所

Institute for Economics and Information Systems  
Gifu Shotoku Gakuen University

1-38 Nakauzura, Gifu 500-8288, Japan

# 確率微分方程式の弱い近似で使用される一般4点分布確率変数について

齊藤善弘\*

## 概要

確率微分方程式の弱い近似スキームで使用される確率変数は正規確率変数である必要はなく、それを近似する確率変数で十分であることが知られている。齊藤 (2021) は漸近安定領域の大きさを比較する尺度として矩形領域を提案し、オイラー・丸山簡易スキームに対して安定性の面で優れた一般3点分布確率変数を提案した。本稿では多点分布確率変数である一般4点分布確率変数に着目し、オイラー・丸山簡易スキームの安定性に有効な確率変数を提案する。

## 1. はじめに

1次元すなわちスカラー自励系の伊藤型確率微分方程式に対する確率初期値問題 (SIVP)

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), \quad t > 0, \quad X(0) = X_0 \quad (1)$$

を考える。ここで  $W(t)$  は標準ウィナー過程である。確率微分方程式の数値スキームの安定性について研究されている [1, 2, 4, 5, 6]。特に Bryden and Higham [1] や Higham [4] は  $\theta \cdot$  丸山スキーム ( $\theta$ -Maruyama scheme) に対する漸近安定性の結果を与えた。本稿ではオイラー・丸山スキーム ( $\theta = 0$ ) のみを取り扱う。オイラー・丸山スキームは、SIVP(1) の  $t = t_n = nh$  ( $h > 0$ ) における解  $X(t_n)$  に対する近似解を  $X_n$  とすると、次式で与えられる [7]。

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n)h + g(X_n)\xi_n \sqrt{h} \quad (2)$$

ここで  $h = t_{n+1} - t_n$  はステップ幅を意味し、各  $\xi_n$  は平均 0、分散 1 の独立な標準正規確率変数  $N(0; 1)$  である。また、 $\xi_n \sqrt{h}$  でもってウィナー過程の増分  $\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n)$  を模擬する [5]。オイラー・丸山スキームの強い収束次数は  $1/2$ 、弱い収束次数は  $1$  である [5]。オイラー・丸山スキームを弱い近似として使用する場合、標準正規確率変数  $\xi_n$  の代わりにつぎの性質を満たす近似正規確率変数  $\hat{\xi}_n$  で代用しても収束次数  $1$  を達成することが知られている [5]。

$$\mathbb{E}[\hat{\xi}_n] = \mathbb{E}[(\hat{\xi}_n)^3] = 0, \quad \mathbb{E}[(\hat{\xi}_n)^2] = 1 \quad (3)$$

ここで、 $\mathbb{E}[\cdot]$  は期待値を表す。性質 (3) を満たす確率変数として、たとえば

$$P(\hat{\xi}_{2,n} = \pm 1) = \frac{1}{2} \quad (4)$$

や

$$\hat{\xi}_{r,n} = \sqrt{12}(u_n - 1/2) \quad (5)$$

がある [5, 3]。ここで  $u_n$  は区間  $[0, 1)$  に分布する一様分布確率変数である。近似正規確率変数 (4) は2点分布確率変数と呼ばれる。近似正規確率変数を用いたスキームを簡易スキーム (simplified scheme) と呼ぶことにし、

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n)h + g(X_n)\hat{\xi}_n \sqrt{h} \quad (6)$$

\*岐阜聖徳学園大学経済情報学部：〒500-8288 岐阜県岐阜市中鶯1-38 (Email: saito@gifu.shotoku.ac.jp)

と表記する。齊藤は、2つの近似正規確率変数 (4) と (5) を取り上げ、オイラー・丸山簡易スキームの漸近安定性について調べた [9]。そして、種々の近似正規確率変数（多点分布確率変数、矩形近似確率変数及び折れ線近似確率変数）についてオイラー・丸山簡易スキームの漸近安定性を調べ、結果を述べた [10, 11]。また弱い近似に対して安定性の面で優れ、かつ実用的な確率変数の探索が課題であると述べた。齊藤 [12] は安定領域の尺度として矩形領域を導入し、弱い2次法で使用される3点分布確率変数、すなわち

$$P(\hat{\xi}_{3,n} = \pm\sqrt{3}) = \frac{1}{6}, \quad P(\hat{\xi}_{3,n} = 0) = \frac{2}{3} \quad (7)$$

を弱い1次法の性質 (3) のみを満たすように一般化し、つぎの一般3点分布確率変数を構成した。

$$P(\hat{\xi}_{3,n}^x = \pm x) = \frac{1}{2x^2}, \quad P(\hat{\xi}_{3,n}^x = 0) = 1 - \frac{1}{x^2} \quad (8)$$

ここでパラメータ  $x \geq 1$  であり、 $x = 1$  のとき2点分布確率変数 (4) と、 $x = \sqrt{3}$  のとき3点分布確率変数 (7) と一致する。3点分布確率変数 (7) は性質 (3) に加えて、

$$\mathbb{E}[(\hat{\xi}_n)^4] = 3, \quad \mathbb{E}[(\hat{\xi}_n)^5] = 0 \quad (9)$$

の性質も満たすことに注意する [5]。一般3点分布確率変数 (8) を装着したオイラー・丸山簡易スキームの漸近安定領域を調べ、安定性の面で優れた確率変数をいくつか提案した [12]。本稿では、同様の手法で4点分布確率変数を弱い2次法の条件である性質 (3) 及び (9) を満たすように一般化し、オイラー・丸山簡易スキームの安定性に有効な一般4点分布確率変数を提案する。

## 2. 漸近安定性解析

オイラー・丸山簡易スキーム (6) の漸近安定性を調べる場合、つぎの乗法的ノイズをもつスカラー線形テスト方程式

$$dX(t) = \lambda X(t)dt + \mu X(t)dW(t), \quad t > 0, \quad X(0) = 1 \quad (10)$$

を考える。ここで、定数  $\lambda$  と  $\mu$  は実数、ただし  $\mu \geq 0$  とする。テスト方程式 (10) の厳密解は

$$X(t) = \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)t + \mu W(t)\right) \quad (11)$$

となるから、解 (11) は  $\lambda - \frac{1}{2}\mu^2 < 0$  のとき、平衡解  $X(t) \equiv 0$  が大域的確率漸近安定になる。すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = 0, \quad \text{w.p.1}$$

を満たす。他方、数値スキームによる近似解  $X_n$  が大域的確率漸近安定性と同様の性質、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n| = 0, \quad \text{w.p.1} \quad (12)$$

を満たすことが期待されるので、数値スキームによる近似解  $X_n$  が性質 (12) を満たすとき、数値スキームは漸近安定性をもつと呼ぶことにする [1, 4]。

さて、オイラー・丸山簡易スキーム (6) をテスト方程式 (10) に適用すると漸化式

$$X_{n+1} = (1 + p + \sqrt{q}\hat{\xi}_n)X_n$$

を得る。ここで、 $p = \lambda h$ 、 $q = \mu^2 h$ とおいた。また、テスト方程式 (10) が大域的確率漸近安定となる条件  $\lambda - \mu^2/2 < 0$  は  $q > 2p$  となることに注意する。

オイラー・丸山簡易スキームの漸近安定領域  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$  をつぎのように定義する。

$$\mathcal{R} := \{(p, q) : q \geq 0 \text{ かつ オイラー・丸山簡易スキームが漸近安定性をもつ}\}$$

オイラー・丸山簡易スキームの漸近安定領域を描画するのに、Higham が導出したつぎの定理を使う [4]。

**定理 1** 独立かつ同一に分布される、非負の実確率変数  $Z_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) が与えられていて、

$$Y_n = \left( \prod_{i=0}^{n-1} Z_i \right) Y_0$$

で定義される確率変数の列  $\{Y_n\}$  を考える。ここで  $Y_0 \geq 0$  かつ  $Y_0 \neq 0$ , w.p.1 を満たしている。確率変数  $\log(Z_i)$  が二乗可積分であると仮定すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0, \quad \text{w.p.1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[\log(Z_i)] < 0, \quad \forall i$$

が成り立つ。

$Y_n = |X_n|$ 、 $Z_i = |1 + p + \sqrt{q}\hat{\xi}_i|$  として、定理 1 を適用すると

$$(p, q) \in \mathcal{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[\log |1 + p + \sqrt{q}\hat{\xi}_n|] < 0, \quad \forall n \quad (13)$$

を得る [1]。ここで  $\mathbb{E}[\log |1 + p + \sqrt{q}\hat{\xi}_n|]$  をオイラー・丸山簡易スキームの漸近安定性関数と呼ぶことにする。弱い 3 次法に使用される近似正規確率変数に、つぎの 4 点分布確率変数

$$P\left(\hat{\xi}_{4,n} = \pm \sqrt{3 - \sqrt{6}}\right) = \frac{1}{12 - 4\sqrt{6}}, \quad P\left(\hat{\xi}_{4,n} = \pm \sqrt{3 + \sqrt{6}}\right) = \frac{1}{12 + 4\sqrt{6}} \quad (14)$$

がある [8, 11]。4 点分布確率変数は標準正規分布確率変数の性質 (3) と (9) に加えて、つぎの性質

$$\mathbb{E}[(\hat{\xi}_n)^6] = 15, \quad \mathbb{E}[(\hat{\xi}_n)^7] = 0 \quad (15)$$

も満たす。4 点分布確率変数の場合の漸近安定性関数は

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\log |1 + p + \sqrt{q}\hat{\xi}_{4,n}|] &= \frac{1}{12 - 4\sqrt{6}} \log \left| (1 + p)^2 - (3 - \sqrt{6})q \right| \\ &\quad + \frac{1}{12 + 4\sqrt{6}} \log \left| (1 + p)^2 - (3 + \sqrt{6})q \right| \end{aligned} \quad (16)$$

となる。

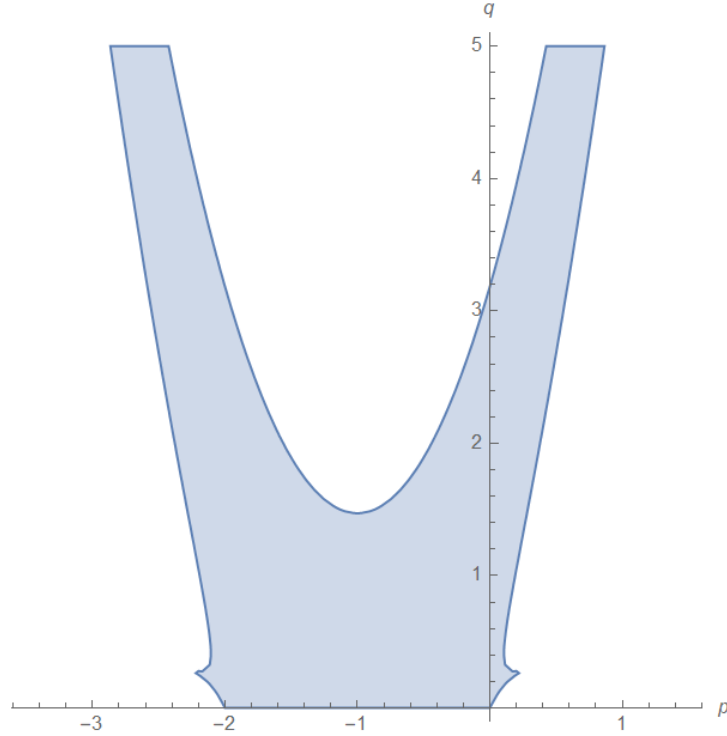


図 1. 漸近安定領域 (4 点分布確率変数)

4 点分布確率変数 (14) を装着したオイラー・丸山簡易スキームの漸近安定領域は図 1 の塗りつぶした部分になる。ただし、塗りつぶしは  $0 \leq q \leq 5$  の範囲で施してある。以降、漸近安定領域の図は境界線のみ表示することにする。

性質 (3) と (9) のみを満たすように 4 点分布確率変数を一般化し、つぎのようにおく。

$$P(\hat{\xi}_{4,n}^s = \pm a) = x_1, \quad P(\hat{\xi}_{4,n}^s = \pm b) = x_2 \quad (17)$$

ここで  $0 \leq a < b$  の実数で、 $\alpha = a^2$ 、 $\beta = b^2$  とおくと

$$x_1 = \frac{\beta - 1}{2(\beta - \alpha)}, \quad x_2 = \frac{1 - \alpha}{2(\beta - \alpha)}$$

となる。 $\alpha$  と  $\beta$  はパラメータ  $s \geq 0$  を使用して

$$\alpha = \frac{s + 3 - \sqrt{s^2 + 2s + 9}}{2}, \quad \beta = \frac{s + 3 + \sqrt{s^2 + 2s + 9}}{2}$$

と表すことができる。 $s = 0$ 、すなわち  $\alpha = 0$ 、 $\beta = 3$  のとき 3 点分布確率変数 (7) と、 $s = 3$ 、すなわち  $\alpha = 3 - \sqrt{6}$ 、 $\beta = 3 + \sqrt{6}$  のとき 4 点分布確率変数 (14) と一致する。また確率変数 (17) を一般 4 点分布確率変数と呼ぶことにする。一般 4 点分布確率変数 (17) をオイラー・丸山簡易スキームに装着した場合の漸近安定領域を  $\mathcal{R}^s$  と表記し、次節では安定領域  $\mathcal{R}^s$  について考察する。

### 3. 考察

本稿で安定性に優れるとは、領域  $\mathcal{R}^s$  の部分集合で、つぎのような矩形領域  $\mathcal{R}^*$

$$\mathcal{R}^* := \{(p, q) : -2 < p < 0, 0 \leq q < r\}$$

の大きさ、つまり矩形領域の高さ  $r$  の値を尺度として使用する [12]。たとえば、4 点分布確率変数 (14) の場合、矩形領域  $\mathcal{R}^*$  を図 2 に示す。領域の高さ  $r$  の値は、式

$$r = \left( \alpha^{1-\beta} \cdot \beta^{\alpha-1} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} \quad (18)$$

に  $\alpha = 3 - \sqrt{6}$ 、 $\beta = 3 + \sqrt{6}$  を代入して求めると、約 1.47193 となる。齊藤 [12] が提案した一般 3 点分布確率変数で最も高い値は 1.32 であったから、一般 3 点分布確率変数より 4 点分布確率変数 (14) の方が安定性の面で優れているといえる。

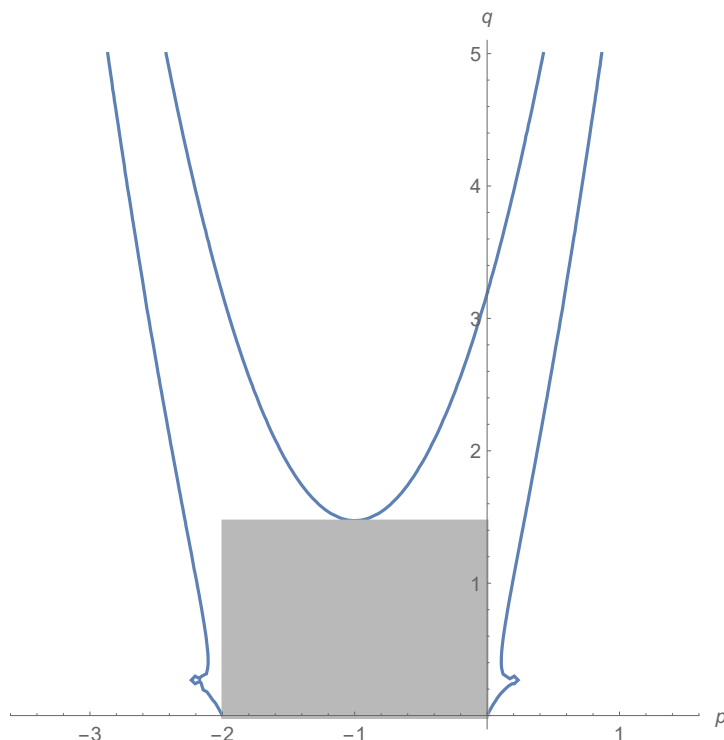


図 2. 矩形領域 (4 点分布確率変数)

一般 4 点分布確率変数 (17) に対する漸近安定性関数は

$$\mathbb{E} \left[ \log |1 + p + \sqrt{q} \hat{\xi}_{4,n}^s| \right] = x_1 \log |(1 + p)^2 - \alpha q| + x_2 \log |(1 + p)^2 - \beta q| \quad (19)$$

となる。 $s = 0.5$  のときの一般 4 点分布確率変数の漸近安定領域  $\mathcal{R}^s$  と矩形領域  $\mathcal{R}^*$  を図 3 に、 $s = 1.5$  のときの各領域を図 4 に示す。

図 3 と図 4 を比較すると図の右側の曲線①に着目して安定性を考察すればよいことがわかる。 $s = 0.5$  のとき、曲線①が  $q$  軸と交わっているため、矩形領域  $\mathcal{R}^*$  の高さ  $r$  が  $q$  軸との交点

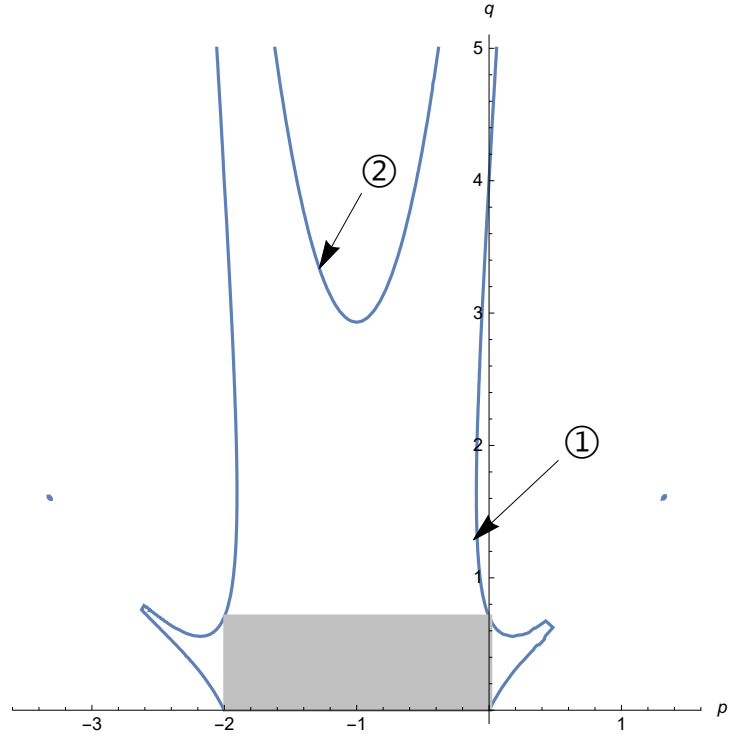


图 3. 渐近安定領域  $\mathcal{R}^s$  ( $s = 0.5$ )

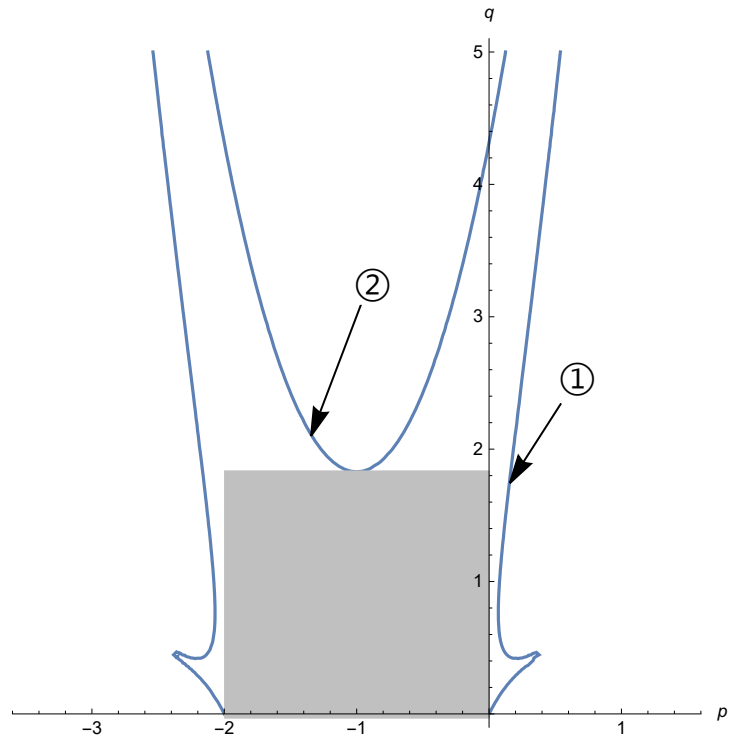


图 4. 渐近安定領域  $\mathcal{R}^s$  ( $s = 1.5$ )

の値となる (図3)。また、図3 ( $s = 0.5$ )、図4 ( $s = 1.5$ ) 及び図2 ( $s = 3$ ) を見ればわかるように、 $s$  の値が増加するにつれて、曲線①は  $p$  軸の正の方向に移動することがわかる。曲線①が  $q$  軸の右側にあるとき、矩形領域の高さ  $r$  は曲線②の最小値になり、 $s$  の値が増加するにつれて、曲線②は  $q$  軸の負の方向に移動することがわかる。よって、矩形領域の高さ  $r$  が最大になるのは、曲線①が  $q$  軸に接するときである。

コンピュータへの実装、つまりコーディングを考慮すると一般4点分布確率変数 (17) に現る確率の値  $x_1, x_2$  は分数が望ましい。 $s$  の値を動かしながら、漸近安定領域をシミュレーションすると、 $s = 0.896$  以上の場合、曲線①は  $q$  軸より右側にあることがわかる。 $s = 0.896$  のとき  $x_1 = 0.389$  であるから、分母の数字が小さい方から候補を探すと、 $x_1 = 2/5$  が見つかる。このとき、 $s = (3\sqrt{2} - 1)/2 \approx 1.12$  である。さらに分母の数字を上げながら、 $s = 0.896$  に近い値を探すと、 $x_1 = 11/28$  が見つかり、このとき  $s = (8\sqrt{66} - 33)/33 \approx 0.969$  となる。以上の考察から、安定性の面で優れた一般4点分布確率変数を2つ提案する。

$$P\left(\hat{\xi}_{5,4,n}^{\frac{3\sqrt{2}-1}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right) = \frac{2}{5}, \quad P\left(\hat{\xi}_{5,4,n}^{\frac{3\sqrt{2}-1}{2}} = \pm \sqrt{1+2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{10} \quad (20)$$

$$P\left(\hat{\xi}_{5,4,n}^{\frac{8\sqrt{66}-33}{33}} = \pm \sqrt{\frac{11-\sqrt{66}}{11}}\right) = \frac{11}{28}, \quad P\left(\hat{\xi}_{5,4,n}^{\frac{8\sqrt{66}-33}{33}} = \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{66}}{3}}\right) = \frac{3}{28} \quad (21)$$

矩形領域の高さは確率変数 (20) が約 2.04187、(21) が約 2.16674 であり、4点分布確率変数 (14) より高い。最後に一般4点分布確率変数 (20)、(21) を装着したオイラー・丸山簡易スキームの漸近安定領域のグラフを図5、図6に示す。

#### 4. まとめと今後の課題

本稿では、確率微分方程式の弱い近似で使用される4点分布確率変数に着目し、漸近安定性に優れた確率変数を提案した。漸近安定領域に含まれる矩形領域の高さを、齊藤が提案した一般3点分布確率変数では 1.32 であったが、2.16 まで広げることができた。提案した確率変数 (21) よりも安定性に優れた確率変数を探することもできるが、確率の分母の数字はより大きくなる。

今後は弱い1次法の条件である性質 (3) のみを満たすように一般4点分布確率変数を構成し、安定性に優れた確率変数の探索が課題である。また、提案した確率変数が陰的スキーム、たとえば  $\theta$ ・丸山簡易スキームに対して、漸近安定領域がどのように変化するか、興味深い。本稿では矩形領域で探索したが、より実用的な安定領域の尺度の開発が今後の課題としてあげられる。

#### 参考文献

- [1] Bryden, A. and Higham, D. J., 2003, “On the boundedness of asymptotic stability regions for the stochastic theta method”, BIT Numerical Mathematics, **43** pp 1–6
- [2] Burrage, K. and Tian, T., 2001, “The composite Euler method for stiff stochastic differential equations”, J. Comput. Appl. Math., **131**, pp 407–426



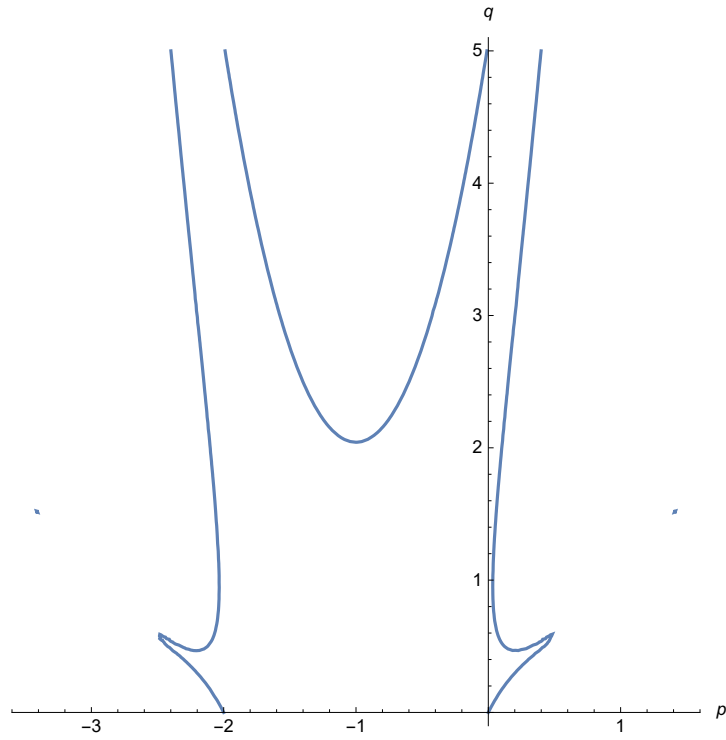


图 5. 渐近安定領域  $\mathcal{R}^s$  ( $s = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}$ )

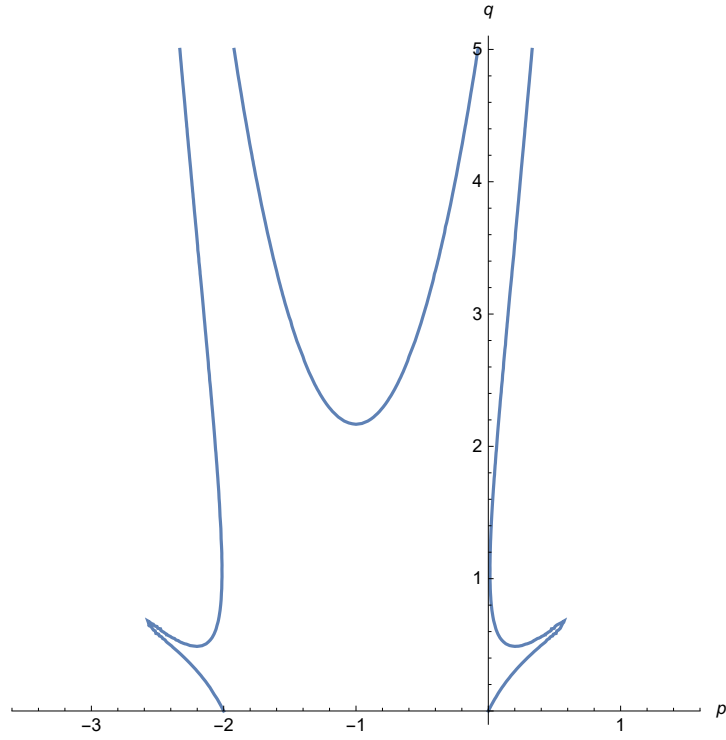


图 6. 渐近安定領域  $\mathcal{R}^s$  ( $s = \frac{8\sqrt{66}-33}{33}$ )

- [3] Greiner, A., Strittmatter, W., and Honerkamp, J., 1987, “Numerical integration of stochastic differential equations”, *J. Statist. Physics* **51**, pp 95–108
- [4] Higham, D. J., 2000, “Mean-square and asymptotic stability of the stochastic theta method”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **38**, 753–769
- [5] Kloeden, P.E., and Platen, E., 1992, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag
- [6] 三井斌友、小藤俊幸、齊藤善弘、2004、『微分方程式による計算科学入門』、共立出版
- [7] Maruyama, G., 1955, Continuous Markov processes and stochastic equations, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **4**, pp48–90
- [8] Platen, E. and Bruti-Liberati, N., *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [9] 齊藤善弘、2012、「オイラー・丸山簡易スキームの漸近安定性」、応用数学分科会講演アブストラクト、日本数学会 2012 年度年会、pp 93–96
- [10] 齊藤善弘、2012、「 $\theta$ ・丸山簡易スキームの数値的漸近安定性」、応用数学分科会講演アブストラクト、日本数学会 2012 年度秋季総合分科会、pp 87–88
- [11] 齊藤善弘、2015、「確率微分方程式の弱い近似で使用される確率変数について」、日本応用数理学会論文誌、**25**、pp 267–283
- [12] 齊藤善弘、2021、「確率微分方程式の弱い近似で使用される一般 3 点分布確率変数について」、*Review of Economics and Information Studies*、**21**、pp 91–100